Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

10. клас

РЕГАЛИЯ 6

СЪДЪРЖАНИЕ

ТЕМА

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

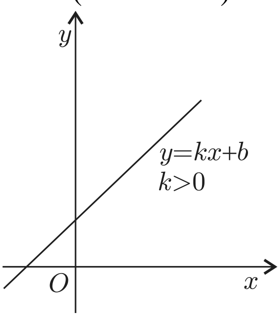
НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. АЛГЕБРА

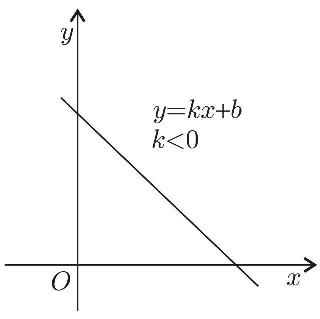
Функции

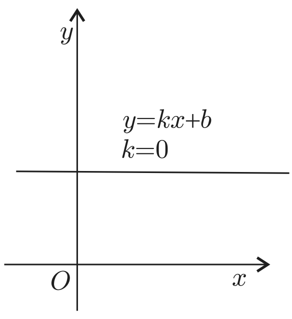
Функцията е основно понятие в математиката. Казваме, че е зададена функция $y = f(x)$ с дефиниционно множество D и множество от функционални стойности E, ако на всеки елемент $x_0 \in D$ е съпоставен точно един елемент y_0 от E. Елементът $x_0 \in D$ наричаме аргумент, а съответният елемент y_0 от E – функционална стойност в x_0. Множествата D и E обикновено са съставени от числа и затова такива функции са числови.

Ако $y = f\,(x)$ е една функция, за която множеството D е числово (то може да съвпада с множеството на реалните числа, да е определен интервал или друг вид множество от числа), то множеството от точки $(x, f\,(x))$ наричаме графика на функцията $f\,(x)$. Ако не е отбелязано нещо специално за D, приемаме, че D съвпада с множеството R на реалните числа. Свойствата на функцията и приближените ѝ стойности може да се определят от вида на нейната графика.

Функция, зададена чрез формулата $y = f\,(x) = kx + b$, наричаме **линейна функция**. Графиката на тази функция е права линия. В случаите, когато $k > 0$ линейната функция е растяща, при $k < 0$ – намаляваща, а при $k = 0$ е константна (постоянна) величина.

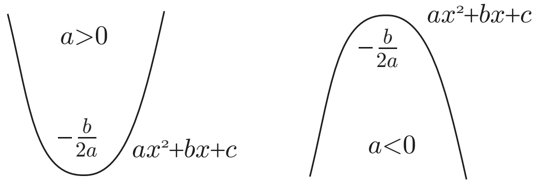






Функция от вида $y = f\,(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, се нарича **квадратна функция**. Графиката на тази функция е парабола. От представянето

$y = ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)$, където $D = b^2 - 4ac$ е дискриминантата на квадратния тричлен, получаваме, че при $a > 0$ функцията приема най-малка стойност при $x = -\frac{b}{2a}$ и съответно при $a < 0$, функцията приема най-голяма стойност при $x = -\frac{b}{2a}$.



Ако $a > 0$ функцията е намаляваща при $x \leqq -\frac{b}{2a}$ и растяща при $x \geqq -\frac{b}{2a}$ и обратно при $a < 0$, функцията е растяща при $x \leqq -\frac{b}{2a}$ и намаляваща при $x \geqq -\frac{b}{2a}$. Точката с координати $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ се нарича **връх на параболата.**

Системи уравнения

Ако за няколко уравнения търсим всички възможни стойности на неизвестните в тях, които удовлетворяват всяко от уравненията, казваме, че е зададена **система уравнения**.

Системи от вида $\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right.$, за които поне един от коефициентите във всяко от уравненията е ненулев, наричаме система линейни уравнения с две неизвестни x и y. Такива системи обикновено решаваме чрез заместване или чрез събиране.

Тъй като графиките на всяко от уравненията са прави линии, решенията на системата могат да се илюстрират като пресечни точки на двете графики и тогава говорим за графично решаване на системите.

Ако поне едно от уравненията в една система е от втора степен, то системата е от втора степен. Някои от тези системи се решават чрез заместване и събиране, като се прилагат теоремите за равносилност на системи уравнения.

Пример 1. Да се реши системата уравнения $\left| \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 4y^2 + x + 3y - 1 = 0 \end{array} \right.$.

Решение:

От първото уравнение изразяваме $y = 2x - 1$ и заместваме във второто, т.е. $x^2 - 4(2x-1)^2 + x + 3(2x-1) - 1 = 0$, откъдето $15x^2 - 23x + 8 = 0$. Последното уравнение има две решения $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{8}{15}$, откъдето

$y_1 = 2x_1 - 1 = 2.1 - 1 = 1$ и $y_2 = 2x_2 - 1 = 2.\dfrac{8}{15} - 1 = \dfrac{1}{15}$. Окончателно решенията са $(1;1)$ и $\left(\dfrac{8}{15}; \dfrac{1}{15}\right)$.

Към този подход можем да отнесем и решаването на системи, в които едно от уравненията е хомогенно, т.е. от вида $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$.

Пример 2. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} 3x^2 + 8xy + 4y^2 = 0 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 4 \end{array} \right.$.

Решение:

Двойката числа $x = 0$ и $y = 0$ е решение на първото уравнение. Но наредената двойка $(0;0)$ не е решение на системата. Следователно можем да приемем, че $x \neq 0,\ y \neq 0$ и да положим $x = ty$. Получаваме $3t^2 + 8t + 4 = 0$. Решенията на последното уравнение са $t_1 = -2$ и $t_2 = -\dfrac{2}{3}$, т.е. $3t^2 + 8t + 4 = (t+2)(3t+2)$ или окончателно $3x^2 + 8xy + 4y^2 = (x + 2y)(3x + 2y) = 0$. Това ни дава възможност да сведем решаването на системата до решаването на следните две системи

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 4 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} 3x + 2y = 0 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 4 \end{array} \right. .$$

Всяка от горните системи е от вида, който разгледахме по-рано. Окончателно системата има четири решения $(2;-3)$, $(-2;3)$, $\left(\sqrt{2}; \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Рационални неравенства

Линейни неравенства с едно и също неизвестно, на които се търсят общите решения, образуват система неравенства с едно неизвестно. Решаването на неравенства от вида $|ax + b| < c$, $|ax + b| \leqq c$, $(ax + b)(cx + d) > 0$, $(ax + b)(cx + d) \geqq 0$, $(ax + b)(cx + d) < 0$, $(ax + b)(cx + d) \leqq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leqq 0$, $\dfrac{ax + b}{cx + d} > 0$, $\dfrac{ax + b}{cx + d} \geqq 0$, $\dfrac{ax + b}{cx + d} < 0$ и $\dfrac{ax + b}{cx + d} \leqq 0$ се свеждат до решаване на системи линейни неравенства. За решаване на квадратни неравенства може да се използва и графиката на квадратната функция. За решаване на рационалните неравенства от втора и по-висока степен се използва методът на интервалите.

Задачи

1. Да се построи графиката на функцията:

а) $y = x + 3$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = \dfrac{1}{2}x - 1$;

г) $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$; д) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$; е) $y = 3 + \left(1 + \sqrt{2}\right)x$.

2. Да се намери стойността на k, ако е известно, че графиката на функцията $y = kx + 6$ минава през точката с координати $(-2; 4)$.

3*. Да се построи графиката на функцията:

а) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} 4, & x \leqq -1 \\ 2x + 2, & x > -1 \end{cases}$;

в) $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leqq -1 \\ 4x + 2, & x > -1 \end{cases}$; г) $f(x) = \begin{cases} -3x + 1, & x \leqq -1 \\ x + 2, & -1 < x \leqq 3 \\ 3x - 1, & x > 3 \end{cases}$.

4. Да се построи графиката на функцията

а) $y = x^2 + 1$; б) $y = -x^2 - 1$;

в) $y = 3x^2 + 6x + 1$; г) $y = -2x^2 + 4x + 7$.

5. Да се реши системата линейни уравнения

а) $\left| \begin{array}{l} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 3y = -8 \end{array} \right.$; б) $\left| \begin{array}{l} 2x + 7y = 6 \\ 6x + 61y = 10 \end{array} \right.$;

в) $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{4}(3x + 1) - \frac{1}{2}(2x - y) = \frac{1}{8}(4y - 3x) \\ \frac{1}{3}(5x + 1) - \frac{1}{2}(y - 3x) = \frac{1}{5}(x + y) \end{array} \right.$.

6. Да се реши системата уравнения

а) $\left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{array} \right.$; б) $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{array} \right.$; в) $\left| \begin{array}{l} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10 \end{array} \right.$; г) $\left| \begin{array}{l} x^2 = 7x + 3y \\ y^2 = 7y + 3x \end{array} \right.$.

7. Да се реши неравенството:

а) $|4x + 3| < 5$; б) $(4x - 3)(5x + 2) < 0$; в) $2x^2 - 4x + 7 \geqq 0$;

г) $\frac{7(1 - 3x)}{4x + 5} \geqq 0$; д) $\frac{5x - 1}{x^2 - 4} \leqq 0$; е) $\frac{x^2 + 7}{49 - 14x + x^2} > 0$;

ж) $\frac{x}{x - 5} > \frac{1}{2}$; з) $\frac{x^2 + 4x - 5}{2x^2 + x - 1} \leqq 0$; и) $\frac{-(x + 2)^4}{x^3(x - 2)^2} \geqq 0$;

к) $\frac{x + 7}{x - 5} + \frac{3x + 1}{2} > 0$; л) $|2 - 5x| > 1$; м) $x \leqq 3 - \frac{1}{x - 1}$.