

Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

10. клас



РЕГАЛИЯ 6

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема. Начален преговор

Начален преговор. Алгебра	7
Начален преговор. Геометрия	11

Тема 1. Иррационални изрази. Иррационални уравнения

1. Иррационални изрази	15
2. Преобразуване на иррационални изрази	19
3. Преобразуване на иррационални изрази чрез рационализиране	21
4. Преобразуване на иррационални изрази. Упражнение	23
5. Иррационални уравнения с един квадратен радикал	26
6. Иррационални уравнения с два квадратни радикала	30
7. Иррационални уравнения, които се решават чрез полагане	32
8. Иррационални уравнения. Упражнение	33
Задачи към тема 1	37
Контролен тест 1	38
Контролен тест 2	39

Тема 2. Прогресии

9. Числови редици. Начини на задаване на числови редици	41
10. Числови редици. Монотонност	44
11. Аритметична прогресия. Формула за общия член на аритметична прогресия	46
12. Свойства на аритметичната прогресия	49
13. Формула за сбора от първите n члена на аритметична прогресия	51
14. Аритметична прогресия. Упражнение	54
15. Геометрична прогресия. Формула за общия член	55
16. Свойства на геометричната прогресия	58
17. Формула за сбора от първите n члена на геометрична прогресия	61
18. Геометрична прогресия. Упражнение	63
19. Комбинирани задачи от аритметична и геометрична прогресия	65
20. Аритметична и геометрична прогресия. Приложения	67

21. Проста лихва. Сложна лихва	71
22. Практически задачи, свързани със сложна лихва	73
Задачи към тема 2	77
Контролен тест	79
Тема 3. Статистика и обработка на данни	
23. Описателна статистика	81
24. Централни тенденции – средноаритметично, мода и медиана	92
Задачи към тема 3	98
Контролен тест	99
Тема 4. Решаване на триъгълник	
25. Тригонометричните функции синус, косинус, тангенс и котангенс в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$	101
26. Основни тригонометрични тъждества в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$	106
27. Основни тригонометрични тъждества в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$. Упражнение	110
28. Таблица за стойностите на тригонометричните функции от някои специални ъгли в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$	113
29. Синусова теорема	116
30. Решаване на произволен триъгълник с помощта на синусова теорема. Основни задачи	120
31. Решаване на произволен триъгълник с помощта на синусова теорема. Упражнение	123
32. Косинусова теорема	126
33. Решаване на произволен триъгълник с помощта на косинусова теорема. Основни задачи	130
34. Решаване на произволен триъгълник с помощта на косинусова теорема. Упражнение	132
35. Формули за медиани на триъгълник. Формули за ъглополовящи на триъгълник	134
36. Формули за медиани и ъглополовящи на триъгълник. Упражнение .	137
37. Формули за лице на триъгълник	139

38. Формули за лице на триъгълник. Упражнение	143
Задачи към тема 4	145
Контролен тест	147

Тема 5. Елементи от стереометрията

39. Приви и равнини в пространството. Основни аксиоми на стереометрията	149
40. Взаимно положение на две прави в пространството и ъгъл между тях	154
41. Взаимно положение на права и равнина. Перпендикулярност на права и равнина	159
42. Ортогонално проектиране. Теорема за трите перпендикуляра	164
43. Ъгъл между права и равнина. Упражнение	169
44. Взаимно положение на две равнини. Успоредни равнини	173
45. Ъгъл между две равнини. Перпендикулярни равнини	177
46. Права призма	183
47. Пирамида	189
48. Многостен. Упражнение	194
49. Прав кръгов цилиндър	199
50. Прав кръгов конус	202
51. Ротационни тела. Упражнение	207
52. Сфера и кълбо	212
53. Комбинации от тела (Вписани сфери). Упражнение*	216
54. Комбинации от тела (Описани сфери). Упражнение*	219
Задачи към тема 5	223
Контролен тест	226

Тема. Систематичен преговор и обобщение от 8. до 10. клас

55. Тъждествени преобразувания на изрази	228
56. Уравнения	231
57. Системи уравнения с две неизвестни	234
58. Неравенства и системи линейни неравенства с едно неизвестно	236
59. Функции	238

60. Окръжност	241
61. Триъгълник	244
62. Четириъгълник	246
63. Лица на геометрични фигури	248
64. Комбинаторика, вероятности, статистика	249
Отговори на задачите	252

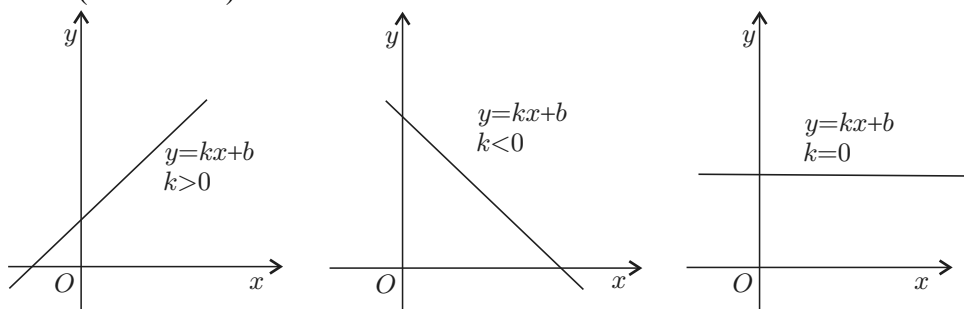
НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. АЛГЕБРА

Функции

Функцията е основно понятие в математиката. Казваме, че е зададена функция $y = f(x)$ с дефиниционно множество D и множество от функционални стойности E , ако на всеки елемент $x_0 \in D$ е съпоставен точно един елемент y_0 от E . Елементът $x_0 \in D$ наричаме аргумент, а съответният елемент y_0 от E – функционална стойност в x_0 . Множествата D и E обикновено са съставени от числа и затова такива функции са числови.

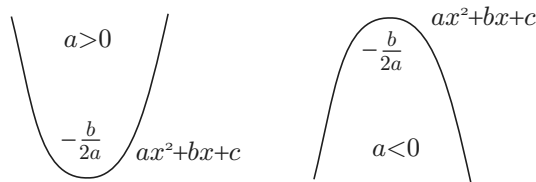
Ако $y = f(x)$ е една функция, за която множеството D е числово (то може да съвпада с множеството на реалните числа, да е определен интервал или друг вид множество от числа), то множеството от точки $(x, f(x))$ наричаме графика на функцията $f(x)$. Ако не е отбелязано нещо специално за D , приемаме, че D съвпада с множеството R на реалните числа. Свойствата на функцията и приближените ѝ стойности може да се определят от вида на нейната графика.

Функция, зададена чрез формулата $y = f(x) = kx + b$, наричаме **линейна функция**. Графиката на тази функция е права линия. В случаите, когато $k > 0$ линейната функция е растяща, при $k < 0$ – намаляваща, а при $k = 0$ е константна (постоянна) величина.



Функция от вида $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, се нарича **квадратна функция**. Графиката на тази функция е парабола. От представянето

$y = ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right)$, където $D = b^2 - 4ac$ е дискриминантата на квадратния тричлен, получаваме, че при $a > 0$ функцията приема най-малка стойност при $x = -\frac{b}{2a}$ и съответно при $a < 0$, функцията приема най-голяма стойност при $x = -\frac{b}{2a}$.



Ако $a > 0$ функцията е намаляваща при $x \leq -\frac{b}{2a}$ и растяща при $x \geq -\frac{b}{2a}$ и обратно при $a < 0$, функцията е растяща при $x \leq -\frac{b}{2a}$ и намаляваща при $x \geq -\frac{b}{2a}$. Точката с координати $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a} \right)$ се нарича **върх на параболата**.

Системи уравнения

Ако за няколко уравнения търсим всички възможни стойности на неизвестните в тях, които удовлетворяват всяко от уравненията, казваме, че е зададена **система уравнения**.

Системи от вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, за които поне един от коефициентите във всяко от уравненията е ненулев, наричаме система линейни уравнения с две неизвестни x и y . Такива системи обикновено решаваме чрез заместване или чрез събиране.

Тъй като графиките на всяко от уравненията са прави линии, решенията на системата могат да се илюстрират като пресечни точки на двете графики и тогава говорим за графично решаване на системите.

Ако поне едно от уравненията в една система е от втора степен, то системата е от втора степен. Някои от тези системи се решават чрез заместване и събиране, като се прилагат теоремите за равносилност на системи уравнения.

Пример 1. Да се реши системата уравнения $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 4y^2 + x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$.

Решение:

От първото уравнение изразяваме $y = 2x - 1$ и заместваме във второто, т.е. $x^2 - 4(2x - 1)^2 + x + 3(2x - 1) - 1 = 0$, откъдето $15x^2 - 23x + 8 = 0$. Последното уравнение има две решения $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{8}{15}$, откъдето

$y_1 = 2x_1 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ и $y_2 = 2x_2 - 1 = 2 \cdot \frac{8}{15} - 1 = \frac{1}{15}$. Окончателно решенията са $(1; 1)$ и $(\frac{8}{15}; \frac{1}{15})$.

Към този подход можем да отнесем и решаването на системи, в които едно от уравненията е хомогенно, т.е. от вида $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$.

Пример 2. Да се реши системата
$$\begin{cases} 3x^2 + 8xy + 4y^2 = 0 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases}.$$

Решение:

Двойката числа $x = 0$ и $y = 0$ е решение на първото уравнение. Но наредената двойка $(0; 0)$ не е решение на системата. Следователно можем да приемем, че $x \neq 0$, $y \neq 0$ и да положим $x = ty$. Получаваме $3t^2 + 8t + 4 = 0$. Решенията на последното уравнение са $t_1 = -2$ и $t_2 = -\frac{2}{3}$, т.е. $3t^2 + 8t + 4 = (t + 2)(3t + 2)$ или окончателно $3x^2 + 8xy + 4y^2 = (x + 2y)(3x + 2y) = 0$. Това ни дава възможност да сведем решаването на системата до решаването на следните две системи

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases}.$$

Всяка от горните системи е от вида, който разгледахме по-рано. Окончателно системата има четири решения $(2; -3)$, $(-2; 3)$, $(\sqrt{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2})$, $(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Рационални неравенства

Линейни неравенства с едно и също неизвестно, на които се търсят общите решения, образуват система неравенства с едно неизвестно. Решаването на неравенства от вида $|ax + b| < c$, $|ax + b| \leq c$, $(ax + b)(cx + d) > 0$, $(ax + b)(cx + d) \geq 0$, $(ax + b)(cx + d) < 0$, $(ax + b)(cx + d) \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $\frac{ax + b}{cx + d} > 0$, $\frac{ax + b}{cx + d} \geq 0$, $\frac{ax + b}{cx + d} < 0$ и $\frac{ax + b}{cx + d} \leq 0$ се свеждат до решаване на системи линейни неравенства. За решаване на квадратни неравенства може да се използва и графиката на квадратната функция. За решаване на рационалните неравенства от втора и по-висока степен се използва методът на интервалите.

Задачи

1. Да се построи графиката на функцията:

а) $y = x + 3$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = \frac{1}{2}x - 1$;

г) $y = 1 - \frac{1}{2}x$; д) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$; е) $y = 3 + (1 + \sqrt{2})x$.

2. Да се намери стойността на k , ако е известно, че графиката на функцията $y = kx + 6$ минава през точката с координати $(-2; 4)$.

3*. Да се построи графиката на функцията:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x \leq -1 \\ 2x + 2, & x > -1 \end{cases};$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq -1 \\ 4x + 2, & x > -1 \end{cases}; \quad \text{г) } f(x) = \begin{cases} -3x + 1, & x \leq -1 \\ x + 2, & -1 < x \leq 3 \\ 3x - 1, & x > 3 \end{cases}.$$

4. Да се построи графиката на функцията

$$\text{а) } y = x^2 + 1; \quad \text{б) } y = -x^2 - 1;$$

$$\text{в) } y = 3x^2 + 6x + 1; \quad \text{г) } y = -2x^2 + 4x + 7.$$

5. Да се реши системата линейни уравнения

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 3y = -8 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 7y = 6 \\ 6x + 61y = 10 \end{cases};$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{1}{4}(3x + 1) - \frac{1}{2}(2x - y) = \frac{1}{8}(4y - 3x) \\ \frac{1}{3}(5x + 1) - \frac{1}{2}(y - 3x) = \frac{1}{5}(x + y) \end{cases}.$$

6. Да се реши системата уравнения

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}; \quad \text{в) } \begin{cases} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10 \end{cases}; \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 = 7x + 3y \\ y^2 = 7y + 3x \end{cases}.$$

7. Да се реши неравенството:

$$\text{а) } |4x + 3| < 5; \quad \text{б) } (4x - 3)(5x + 2) < 0; \quad \text{в) } 2x^2 - 4x + 7 \geq 0;$$

$$\text{г) } \frac{7(1 - 3x)}{4x + 5} \geq 0; \quad \text{д) } \frac{5x - 1}{x^2 - 4} \leq 0; \quad \text{е) } \frac{x^2 + 7}{49 - 14x + x^2} > 0;$$

$$\text{ж) } \frac{x}{x - 5} > \frac{1}{2}; \quad \text{з) } \frac{x^2 + 4x - 5}{2x^2 + x - 1} \leq 0; \quad \text{и) } \frac{-(x + 2)^4}{x^3(x - 2)^2} \geq 0;$$

$$\text{к) } \frac{x + 7}{x - 5} + \frac{3x + 1}{2} > 0; \quad \text{л) } |2 - 5x| > 1; \quad \text{м) } x \leq 3 - \frac{1}{x - 1}.$$